Over de vergelijking van Pell

Schepel, Dirk

INLEIDING.

De oplossing van de vergelijking van Pell

$$(1) \qquad x^2 - dy^2 = 1$$

is één van de oudste problemen der rekenkunde. Op verscheidene gebieden der getallenleer ontmoet men deze vergelijking. Zij heeft zich dan ook eeuwen achtereen in de belangstelling van de wiskundigen mogen verheugen, zooals blijkt uit meer dan 300 publicaties over dit onderwerp.

Voor de historische ontwikkeling van het probleem verwijs ik naar een drietal uitstekende bibliografieën:

L. E. DICKSON, History of the Theory of Numbers II 1920, blz. 341—400.

E. E. WHITFORD, The Pell Equation, Columbia Univ. Diss., New-York 1912.

H. KONEN, Geschichte der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$, Leipzig 1901.

In deze inleiding zal ik die ontwikkeling in grove trekken schetsen en daarna een beknopt overzicht geven van de inhoud van dit proefschrift. Wanneer ik bij de historische schets tot de gebruikelijke oplossingsmethode ben gekomen, zal ik de ontwikkelingsgang even onderbreken om die methode in 't kort uiteen te zetten.

Nadat de Grieken en de Indiërs hun krachten aan de oplossing van vergelijking (1) hadden beproefd, heeft FERMAT het probleem opnieuw aan de orde gesteld. Hij daagde nl. in 1657 alle wiskundigen uit, een algemeene oplossing van de vergelijking (1) in geheele getallen te geven voor een willekeurig natuurlijk getal d dat geen kwadraat is. In 't zelfde jaar nog vonden de beide Engelschen WALLIS en BROUNKER een methode, die tot het doel voerde voor $d = 433$ en $d = 313$. Zij konden evenwel niet bewijzen, dat hun recept voor iedere waarde van d een oplossing opleverde.

EULER bekortte in 1765 de berekening tot op de helft door gebruik te maken van de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{d}$. Van EULER is ook de naam „vergelijking van Pell" afkomstig. Er wordt echter door historici over getwist of PELL zich wel ooit met de naar hem genoemde vergelijking heeft bezig gehouden. Men neemt tegenwoordig vrij algemeen aan, dat die naamgeving op een vergissing berust. Vandaar, dat de vergelijking door sommige schrijvers ,,vergelijking van Fermat" wordt genoemd.

Onafhankelijk van EULER gaf ook LAGRANGE een oplossing van het probleem met behulp van kettingbreuken (1768—'70). Hij toonde meteen aan, dat zijn methode voor iedere waarde van d bruikbaar was en dat de door hem afgeleide rekenregels eigenlijk dezelfde waren als die van WALLIS en BROUNKER. HANKEL liet zien, dat ook de Indische methode op hetzelfde neerkomt. Het werk van LAGRANGE is nog heel wat vereenvoudigd door LEGENDRE.

Omdat de kettingbreukenmethode nog altijd de gebruikelijke oplossingsmethode is, volgt hier een korte uiteenzetting daarvan.

Is d een natuurlijk getal, geen kwadraat, dan kan men $\sqrt{d}$ ontwikkelen in een oneindige kettingbreuk met gedeeltelijke tellers 1 en met positieve gedeeltelijke noemers:

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots \tag{2}$$

Daartoe bepaalt men uit de betrekkingen

$$\left\{\begin{array}{lll} b_0 = 0, & c_0 = 1; & \\ b_n = a_{n-1}c_{n-1} - b_{n-1}, & c_n = \dfrac{d - b_n^2}{c_{n-1}} & (n \geqq 1); \\ a_n = \text{'t grootste geheele getal} < \dfrac{\sqrt{d} + b_n}{c_n} & & (n \geqq 0) \end{array}\right. \tag{3}$$

de getallen b_n, c_n en a_n; behalve b_0 zijn het allemaal natuurlijke getallen.

Met behulp van de in (2) aangegeven kettingbreukontwikkeling en van de getallen c_n heeft men de vergelijking

$$x^2 - dy^2 = A \tag{4}$$

onderzocht, als A een geheel getal $\neq 0$ is. Lagrange bewees nl. de volgende stelling.

STELLING I: *Indien* A *een geheel getal* $\neq 0$ *voorstelt en*

$$|A| < \sqrt{d}$$

is, dan is noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat twee onderling ondeelbare getallen x *en* y *bestaan met*

$$x^2 - dy^2 = A, \tag{4}$$

dat een natuurlijk getal n *te vinden is met de eigenschap*

$$\mathrm{A} = (-1)^n c_n,$$

waarbij c_n *een van de door* (3) *gedefinieerde getallen is.*
Stelt

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_{n-1}}$$

de n^{de} *naderende breuk van* $\sqrt{d}$ *voor, dan is*

$$p_n^2 - dq_n^2 = (-1)^n c_n.$$

Laten we nu de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{d}$ nauwkeuriger bekijken.

De drie rijen

(5) $\quad a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$

(6) $\quad b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n, \ldots\ldots$

(7) $\quad c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n, \ldots\ldots$

zijn periodiek en de perioden vertoonen een zekere symmetrie. De drie rijen zien er nl. als volgt uit:

$$\begin{array}{ll|l|l|l}
(8) & a_0, & a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0, & a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0, & a_1, a_2, \ldots \\
(9) & 0, & a_0, b_2, \ldots, b_3, b_2, a_0, & a_0, b_2, \ldots, b_3, b_2, a_0, & a_0, b_2, \ldots \\
(10) & 1, & c_1, c_2, \ldots, c_2, c_1, 1, & c_1, c_2, \ldots, c_2, c_1, 1, & c_1, c_2, \ldots
\end{array}$$

Bestaat elke periode uit k getallen, dan gelden voor $1 \leqq h \leqq \frac{1}{2}k$ de betrekkingen [1])

$$1 \leqq a_h < 2\sqrt{d},$$
$$1 \leqq b_{h+1} < \sqrt{d},$$
$$1 < c_h < 2\sqrt{d},$$
$$a_h c_h \text{ is ongeveer } 2a_0.$$

We onderscheiden nu twee gevallen:

1) k is *even.*

Dan stellen we $k = 2i$ en krijgen de rijen (8), (9) en (10) de volgende gedaante:

$$\begin{array}{l|l|l}
a_0, & a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots, a_2, a_1, 2a_0, & a_1, \ldots \\
0, & a_0, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_i, b_{i-1}, \ldots, b_3, b_2, a_0, & a_0, \ldots \\
1, & c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i, c_{i-1}, c_{i-2}, \ldots, c_2, c_1, 1, & c_1, \ldots
\end{array}$$

[1]) Zie b.v. Legendre, Théorie des nombres I 1830, blz. 52 en 61.

De bijbehoorende periodieke kettingbreuk is

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_{i-1}} + \frac{1|}{|a_i} + \frac{1|}{|a_{i-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|2a_0} + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots$$

Men stelt deze gewoonlijk aldus voor:

$$\sqrt{d} = \{a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i-1}, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}\},$$

2) k is *oneven.*

Dan stellen we $k = 2i + 1$ en komen de rijen (8), (9) en (10) er als volgt uit te zien:

$$\begin{array}{l|l|l}
a_0, & a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \; a_i, \; a_i, \quad a_{i-1}, \ldots, a_2, \; a_1, \; 2a_0, & a_1, \ldots \\
0, & a_0, b_2, \ldots, b_{i-1}, \; b_i, \; b_{i+1}, b_i, \ldots, b_3, \; b_2, \; a_0, & a_0, \ldots \\
1, & a_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, \; c_i, \; c_i, \quad c_{i-1}, \ldots, c_2, \; c_1, \; 1, & c_1, \ldots
\end{array}$$

De bijbehoorende periodieke kettingbreuk

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_{i-1}} + \frac{1|}{|a_i} + \frac{1|}{|a_i} + \frac{1|}{|a_{i-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|2a_0} + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots$$

wordt aldus voorgesteld

$$\sqrt{d} = \{a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_i, a_{i-1}, \ldots, a_2, a_1, 2a_0}\}$$

DEGEN heeft met behulp van de betrekkingen (3) de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{d}$ bepaald voor alle waarden van $d \leqq 1000$ [1]). Bij ieder getal d schrijft hij de gedeeltelijke noemers

---

[1]) C. F. DEGEN, Canon Pellianus enz., Kopenhagen 1817.
DEGEN geeft bij iedere waarde van d meteen de fundamenteele oplossing van de vergelijking van PELL (1) op.
Deze tafel is voortgezet tot $d = 1500$ door C. E. BICKMORE in: Report British Assoc. for 1893, 1894, blz. 73—120.
E. E. WHITFORD breidde in 't aangehaalde proefschrift de tafels nog uit tot $d = 1700$; met de kettingbreukenlijst ging hij tot 2000.
B. en W. geven, indien mogelijk, de fundamenteele oplossing van $x^2 - dy^2 = -1$ op; anders die van (1).
Voor fouten in de drie genoemde tafels zie: A. J. C. CUNNINGHAM, Quadratic Partitions, 1904, blz. 260—266 en Mess. of Math. 46, 1916, blz. 49—69; D. H. LEHMER, Bull. Math. Soc., 1926, blz. 545—550. LEHMER stelt bovendien een voortzetting van de tafels tot $d = 2000$ in uitzicht.

a_n $(n = 0, 1, \ldots., i)$ neer en daaronder de getallen c_n, zoodat hij in 't eerste geval (k even) de rijen

(11) $$a_0, a_1, a_2, \ldots.., a_{i-1}, (a_i)$$

(12) $$1, c_1, c_2, \ldots.., c_{i-1}, c_i$$

krijgt en in het tweede geval (k oneven) de rijen

(13) $$a_0, a_1, \ldots.., a_{i-1}, (a_i, a_i)$$

(14) $$1, c_1, \ldots.., c_{i-1}, c_i, c_i.$$

Daarbij zijn de getallen a_i tusschen haakjes geplaatst, om met één oogopslag in zijn tafel te kunnen zien, van welke kettingbreukontwikkelingen de periode uit een *even* aantal en van welke zij uit een *oneven* aantal getallen bestaat.

Keeren we thans terug tot het onderzoek van de vergelijking

(4) $$x^2 - dy^2 = \mathrm{A},$$

waarin A een geheel getal voorstelt met de eigenschap

$$0 < |\mathrm{A}| < \sqrt{d}.$$

Is k even $(k = 2i)$, dan hebben alle getallen 1 uit rij (7) tot rangnummer $2hi$, als h een willekeurig natuurlijk getal voorstelt. Is k oneven $(k = 2i + 1)$, dan hebben alle getallen 1 uit rij (7) tot rangnummer $h(2i + 1)$, waarbij h een willekeurig natuurlijk getal is.

Derhalve volgen uit stelling I onderstaande 4 stellingen:

STELLING II: Bestaat de periode van de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{d}$ uit een even aantal getallen $(k = 2i)$ en is $\frac{p_{2hi}}{q_{2hi}}$ de $2hi^{\text{de}}$ naderende breuk van $\sqrt{d}$, dan is

$$p_{2hi}^{\;2} - dq_{2hi}^{\;2} = 1.$$

De vergelijking

$$x^2 - dy^2 = -1$$

heeft dan geen geheele oplossingen.

STELLING III: Bestaat de periode van de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{d}$ uit een oneven aantal getallen $(k = 2i + 1)$ en stelt $\frac{p_{hk}}{q_{hk}}$ de hk^{de} naderende breuk van $\sqrt{d}$ voor, dan is

$$p_{hk}^{\;2} - dq_{hk}^{\;2} = (-1)^h.$$

STELLING IV: Indien A *een geheel getal voorstelt met*

$$1 < |\,A\,| < \sqrt{d}$$

en de periode van de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{d}$ *een even aantal gedeeltelijke noemers heeft* $(k = 2i)$, *dan is noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat twee onderling ondeelbare getallen x en y bestaan met*

$$x^2 - dy^2 = A, \tag{4}$$

dat in de eerste helft van de periode van rij (12) *een getal* c_h *voorkomt met*

$$|\,c_h\,| = A$$

en met even of oneven rangnummer h, al naar gelang A *positief of negatief is.*

Is deze voorwaarde vervuld en stelt $\dfrac{p_h}{q_h}$ *de* h^{de} *naderende breuk van* $\sqrt{d}$ *voor, dan is*

$$p_h^2 - dq_h^2 = A.$$

STELLING V. Is A *een geheel getal met*

$$1 < |\,A\,| < \sqrt{d}$$

en heeft de periode van de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{d}$ *een oneven aantal gedeeltelijke noemers* $(k = 2i + 1)$, *dan is noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat twee onderling ondeelbare getallen x en y met*

$$x^2 - dy^2 = A \tag{4}$$

te vinden zijn, dat onder de eerste i getallen van de periode van rij (14) *een getal* c_h *voorkomt met*

$$c_h = |\,A\,|.$$

Is aan deze voorwaarde voldaan en stelt $\dfrac{p_n}{q_n}$ $(n =$ *natuurlijk getal*) *de* n^{de} *naderende breuk van* $\sqrt{d}$ *voor, dan gelden tegelijkertijd de beide betrekkingen*

$$p_h^2 - dq_h^2 = (-1)^h\,|\,A\,| \text{ en } (p_{2i+1-h})^2 - d(q_{2i+1-h})^2 = (-1)^{h+1}|A|.$$

Een gevolg van stelling II en III is

STELLING VI: Noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat de vergelijking

$$\xi^2 - d\eta^2 = -1 \tag{15}$$

minstens één geheele positieve oplossing heeft, is, dat de periode van de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{d}$ *uit een oneven aantal getallen bestaat; m.a.w., dat de bovenste rij in de zoo noodig voortgezette tafel van Degen eindigt met twee getallen tusschen haakjes.*

Voor het geval

$$|\,\mathrm{A}\,| > \sqrt{d}$$

is, laat zich het onderzoek van de vergelijking

$$x^2 - dy^2 = \mathrm{A} \tag{4}$$

met behulp van een eindig aantal (n) herleidingen terugbrengen [1]) tot het onderzoek van de vergelijking

$$x^2 - d_n y^2 = \mathrm{A}_n,$$

waarin d_n een natuurlijk getal, geen kwadraat, is en A_n een geheel getal waarvoor de ongelijkheden

$$|\,\mathrm{A}_n\,| < |\,\mathrm{A}\,|, \qquad |\,\mathrm{A}_n\,| < \sqrt{d_n}$$

gelden.

Hiermede moge de kettingbreukenmethode voldoende toegelicht zijn.

Zonder kettingbreuken te gebruiken heeft DIRICHLET een eenvoudig bewijs geleverd van de volgende stelling:

De vergelijking van Pell

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{1}$$

heeft oneindig veel geheele positieve oplossingen.
De geheele positieve oplossing waarbij y zoo klein mogelijk is, heet de **fundamenteele oplossing.**

Kent men de fundamenteele oplossing

$$x = x_1, \qquad y = y_1,$$

dan vindt men alle geheele positieve oplossingen door te stellen

$$x + y\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n,$$

als n de rij der natuurlijke getallen doorloopt.

Daarbij zij nog in 't voorbijgaan opgemerkt, dat DIRICHLET deze stelling uitbreidde tot complexe getallen.

De noodzakelijke en voldoende voorwaarde van stelling VI bevredigde slechts matig en men heeft gezocht naar een andere vorm voor die voorwaarde.

---

[1]) Zie KONEN, Geschichte blz. 63—65.

In 1907 leidde NIEUWENGLOWSKY de volgende reeds door DEGEN en LEGENDRE opgemerkte stelling af:

STELLING 10 (*blz. 23*): *Zij* (x_1, y_1) *de fundamenteele oplossing van*

$$(1) \qquad x^2 - dy^2 = 1;$$

dan is noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat

$$(15) \qquad \xi^2 - d\eta^2 = -1$$

geheele oplossingen bezit, dat er twee natuurlijke getallen ξ_1 *en* η_1 *te vinden zijn met de eigenschappen*

$$x_1 = 2\xi_1{}^2 + 1, \qquad y_1 = 2\xi_1\eta_1.$$

Bestaat zoo'n getallenpaar (ξ_1, η_1), *dan is het de fundamenteele oplossing van* (15).

Verder heeft men getracht, de oplosbaarheid of onoplosbaarheid van vergelijking (15) in verband te brengen met de factorenontbinding van het getal d. Deze poging is slechts gedeeltelijk gelukt (zie blz. 15—16).

Ook de stellingen II en III gaven geen volle bevrediging. Immers: Voor elke waarde van d moest de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{d}$ worden bepaald. Van die ontwikkeling viel niets te voorspellen met behulp van andere kettingbreukontwikkelingen. En toch bleek soms — doch pas als de ontwikkeling heelemaal af was — dat zij in eenvoudig verband stond met een of meer andere kettingbreuken. Deze omstandigheid schijnt meer of minder bewust de oorzaak geweest te zijn, dat naar andere methoden is gezocht.

GAUSZ heeft de vergelijking van PELL (1) in verband gebracht met de transformatie van kwadratische vormen met discriminant d. DIRICHLET zette dat onderzoek voort, breidde het probleem uit tot complexe getallen en kwam tot een oplossing van de vergelijking van PELL met behulp van de theorie van de cirkeldeeling (1837).

STERN en MINNIGERODE hebben een andere kettingbreukenmethode gevonden om de vergelijking van Pell op te lossen, nl. door $\sqrt{d}$ te ontwikkelen in een kettingbreuk met *negatieve* gedeeltelijke noemers en daarna de voorgaande methode toe te passen (1873).

Bovengenoemde oplossingsmethoden van Gausz—Dirichlet en van Stern—Minnigerode worden nooit gebruikt. 'k Zal ze daarom verder buiten beschouwing laten.

Intusschen hebben verscheidene onderzoekers (zooals DEGEN, STERN, RICHAUD, BOUTIN, DE JONQUIÈRES) allerlei regelmaat gevonden in de kettingbreukentafels, zoodat ze met stelling II en III een groot aantal identiteiten konden opschrijven. Bijvoorbeeld:

$$\left(\frac{2a^2}{b}+1\right)^2-(a^2+b)\left(\frac{2a}{b}\right)^2=1,$$

waarin $a > 0$ en b een positieve of negatieve deeler van $2a$ is;

$$(4a^3+6a^2-1)^2-\{(2a+1)^2-4\}(2a^2+2a)^2=1;$$

$$(81a^2+72a+17)^2-(9a^2+8a+2)(27a+12)^2=1;$$

$$(1250a^2-700a+99)^2-(25a^2-14a+2)(250a-70)^2=1;$$

$$(72a+17)^2-(36a^2+17a+2)\,.\,12^2=1.$$

Het zoeken naar een *algemeene* identiteit, geldig voor *iedere* waarde van d, is evenwel vruchteloos geweest, hoewel dit streven bijna even oud is als het geheele probleem (sommige van de bekende identiteiten waren nl. ook reeds door de Indiërs gevonden).

Alle bekende identiteiten van deze soort, die ieder afzonderlijk als bij toeval werden ontdekt, zijn te beschouwen als bizondere gevallen van de oneindige rijen identiteiten die met behulp van de stellingen 20, 21, 22, 38, 44, 63 en 64 van dit proefschrift op zeer eenvoudige wijze systematisch kunnen worden opgeschreven zonder kettingbreuken te gebruiken.

Met behulp van deze stellingen kan men, daar ze voor de betrokken waarden van d direct de *fundamenteele* oplossing opleveren, heel wat rekenwerk besparen bij het maken van een tafel met fundamenteele oplossingen van de vergelijking van Pell.

Om deze stellingen, die het doel van m'n proefschrift vormen, af te leiden, zal ik geen gebruik maken van kettingbreukontwikkelingen.

Ik ga uit van de formule van DIRICHLET voor alle geheele positieve oplossingen (x, y) van vergelijking (1), nl.

$$x+y\sqrt{d}=(x_1+y_1\sqrt{d})^n,$$

waarin (x_1, y_1) de fundamenteele oplossing voorstelt en n de rij der natuurlijke getallen doorloopt. Uit het verband van deze oplossingen met die van vergelijking (15) volgt de zooeven genoemde stelling 10.

Stelling 13 geeft een criterium om uit te maken of een gegeven oplossing van de vergelijking van Pell (1), of eventueel van (15), de fundamenteele is of niet.

In hoofdstuk II wordt aan stelling 13 ontleend een voldoende voorwaarde opdat een oplossing van (15) de fundamenteele zij;

eveneens een voldoende voorwaarde opdat een oplossing van (1) de fundamenteele is en tegelijkertijd (15) geen geheele oplossingen bezit.

Hoofdstuk III onderzoekt met behulp van 't voorafgaande de vergelijkingen (1) en (15), ingeval d een natuurlijk getal is van minstens één der drie volgende gedaanten:

$d = a^2 + b$ $(a > 0$, b is een positieve of negatieve deeler van $2a)$,

$$d = (2a + 1)^2 + 4,$$
$$d = (2a + 1)^2 - 4.$$

De resultaten van dit hoofdstukje waren in ruwe vorm reeds bekend.

Hoofdstuk IV bevat drie eveneens bekende stellingen aangaande de fundamenteele oplossing van (1) resp. (15) voor het geval d deelbaar is door een kwadraat. Bovendien een drietal toepassingen, waaronder een vraagstukje dat ik in 1929 voor het Wiskundig Genootschap heb opgegeven.

Hoofdstuk V geeft enkele stellingen over de geheele oplossingen (X, D) van de vergelijking

$$X^2 - DY^2 = A,$$

waarin Y een natuurlijk getal, A een geheel getal $\neq 0$ is. Als nevenresultaat vindt U in de opmerking bij stelling 31 een algemeene methode om een tafel te maken van de fundamenteele oplossingen van

$$x^2 - dy^2 = c^2,$$

waarbij c een willekeurig natuurlijk getal is en d de rij der natuurlijke getallen doorloopt (kwadraten uitgezonderd).

In hoofdstuk VIII wordt een theorie ontwikkeld over de fundamenteele oplossing van de vergelijking

$$u^2 - dv^2 = \pm 2.$$

De hoofdstukken VI, VII en IX leveren de bovenbedoelde stellingen 38, 44, 63 en 64, benevens een aantal opmerkingen over het gebruik daarvan.